

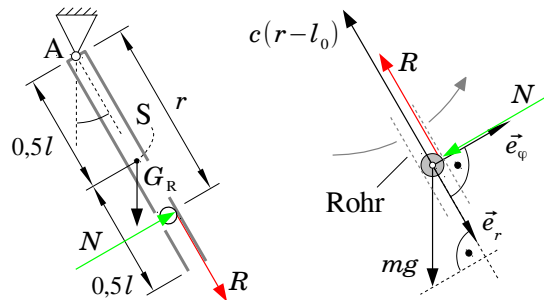
Mathematische Dynamik

(3. Aufl., 2021)

– Erratum zu Ergänzung 1 von Beispiel 6.2, S. 399ff. –

Martin Prechtel im Mai 2021

Ergänzung 1: Die Punktmasse m befindet sich zusätzlich in einem (vorerst) masselosen, um A mitpendelnden Rohr; das Spiel zwischen Körper und Rohr ist “klein”, der Reibbeiwert der entspr. Materialpaarung sei μ . Es tritt folglich stets in radialer Richtung eine COULOMBSche Reibkraft $R = \mu N$ auf. Betrachtet man bspw. die Bewegung von m in positiver r -Richtung, d.h. von A weg, so ist R an diesem Körper nach innen, also zum raumfesten Lagerpunkt A hin orientiert. **Zudem sei für den Fall einer Drehung im pos. Sinn angenommen, dass die am Massenpunkt m angreifende Normalkraft N “nach links” zeigt;** diese ist übrigens die Wechselwirkungskraft zwischen Körper (drückt gegen Rohr) und dem hinreichend langen Rohr. Am Rohr wirken wegen “actio = reactio” die Kräfte jeweils entgegengesetzt. Die nachfolgenden Skizzen zeigen die Freikörperbilder von Massenpunkt (rechts) und Rohr (links) – **Hypothese: Die Punktmasse gleitet an an der rechten Rohrwand.**



In diesem Fall lautet die zirkulare Kräftegleichung für den Massenpunkt:

$$ma_\varphi = -mg \sin \varphi - N, \quad \text{mit} \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Damit ergibt sich mit $\dot{r} > 0$ und $\dot{\varphi} > 0$, vgl. Beschreibung oben,

$$N = -m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi) < 0$$

für $|\ddot{\varphi}|$ hinreichend klein (Betrag, da $\varphi, \dot{\varphi} > 0$ und damit $\ddot{\varphi} < 0$), d.h. N ist tatsächlich genau entgegengesetzt, also nach rechts orientiert – die Punktmasse bewegt sich demnach an der linken Rohrwand, und folglich die Reibkraft zu

$$R = \mu|N| = +\mu m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi).$$

Die Reibkraft wirkt natürlich stets längs des Rohrs, $\vec{R} = -R\vec{e}_r$; für deren an der Punktmasse verrichtete virtuelle Arbeit gilt somit:

$$\delta W_R^* = -R\vec{e}_r \delta \vec{r} = -R\vec{e}_r (\delta r \vec{e}_r + r \delta \varphi \vec{e}_\varphi) = -R \delta r;$$

das virtuelle Ortsvektordifferenzial $\delta \vec{r}$ folgt aus (1.13) mit Umbenennung “d = δ ”:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}}{\frac{d\vec{r}}{dt}} &= \frac{\dot{r}}{\frac{dr}{dt}} \vec{e}_r + r \frac{\dot{\varphi}}{\frac{d\varphi}{dt}} \vec{e}_\varphi \mid \cdot dt. \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Infolge der Drehung des Rohrs um A, wirkt dort die Reibkraft R stets senkrecht zur (kreisförmigen) Bahn des entsprechenden Massenelementes; sie verrichtet demnach – wie auch an einer ruhenden Umgebung – am Rohr zwar “radiale Arbeit”, führt jedoch zu keiner Lage- und/oder Impulsänderung, sondern wird in therm. Energie (Wärme) umgewandelt.

Die zirkular orientierte Normalkraft N wirkt zum einen parallel bzgl. des virtuellen Bogenweges $r\delta\varphi$ (Drehung um A); sie verrichtet daher am Rohr und an der Punktmasse virtuelle Arbeit, wegen “actio = reactio” ist die Summe dieser Arbeiten aber Null. Und für den radialen Weganteil des Massenpunktes gilt ohnehin: $\delta W_{N,r} = |N| \vec{e}_\varphi \cdot \delta r \vec{e}_r = 0$. Bei dieser Reaktionskraft handelt es sich soz. um eine Zwangs- bzw. Führungskraft für die radiale Bewegungsrichtung des Massenpunktes.

In diesem Fall ergibt sich folglich die gesamte nicht-konservative virtuelle Arbeit zu

$$\delta W^* = \delta W_R^* = -R \delta r + (0 \cdot \delta \varphi),$$

d.h. es liefert die generalisierte Koordinate $q_2 = \varphi$ keinen Anteil. Nach (4.8) lässt sich die virtuelle Arbeit zudem aus den nicht-konservativen generalisierten Kräften berechnen. Mit $f = 2$ gilt:

$$\delta W^* = Q_1^* \delta q_1 + Q_2^* \delta q_2.$$

Der Koeffizientenvergleich mit der virtuellen Arbeit in der Form $\delta W^* = -R \delta r$ sowie $q_1 = r$ und $q_2 = \varphi$ liefert

$$Q_1^* = -R = -\mu m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi) \quad \text{und} \quad Q_2^* = 0.$$

Bevor man nun Q_1^* in die LAGRANGESche Gleichung 2. Art einsetzt, sei noch ein Blick auf den Momentensatz für das Rohr erlaubt – Warum? Betrachtet man obiges Freikörperbild (links), so ist doch mit einem masselosen Rohr dessen Gewicht $G_R = m_R g = 0$ (m_R ist d. Masse des Rohrs). Und dann würde einzig $N \neq 0$ ein Moment bzgl. A, d.h. eine endliche Drehwirkung für einen masselosen Körper erzeugen. Der Momentensatz

$$J_R^{(A)} \ddot{\varphi} = rN - \frac{l}{2} m_R g \sin \varphi, \quad [\text{Hinw.: } N \text{ eliminiert, würde bereits eine Bewegungsgleichung ergeben.}]$$

mit dem Massenträgheitsmoment $J_R^{(A)}$ des Rohrs der Länge l bzgl. jener raumfesten Achse durch A, liefert mit $m_R = 0$ und damit auch $J_R^{(A)} = 0$ einen Widerspruch, nämlich $N = 0$, da $r \neq 0$. D.h. die modellmäßige Vereinfachung $m_R = 0$ ist nicht “zulässig”. Soll bewusst Reibung zwischen den Körpern berücksichtigt werden, die ja in jedem Fall auftritt, darf man die Rohrmasse m_R nicht vernachlässigen.

Doch das bedeutet wiederum, dass das Rohr auch kinetische (Rotation um A) und potentielle (Schwerpunkt S) Energie besitzt:

$$E_{k,R} = \frac{1}{2} J_R^{(A)} \omega^2 = \frac{1}{2} J_R^{(A)} \dot{\varphi}^2 \quad \text{und} \quad E_{p,R} = -m_R g z_S = -m_R g \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Damit ergibt sich die “erweiterte” LAGRANGE-Funktion zu

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + \underbrace{\frac{1}{2}J_{\text{R}}^{(\text{A})}\dot{\varphi}^2}_{\text{}} - \frac{1}{2}c(r - l_0)^2 + mgr \cos \varphi + \underbrace{m_{\text{R}}g\frac{l}{2} \cos \varphi}_{\text{}} .$$

Mit den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art erhält man sodann:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1^*$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m 2\dot{r} \right) - \left(\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 2r - \frac{1}{2}c 2(r - l_0) + mg \cos \varphi \right) = -R$$

$$m\ddot{r} - (m\dot{\varphi}^2 r - c(r - l_0) + mg \cos \varphi) = -\mu m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi)$$

$$\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r + \frac{c}{m}(r - l_0) - g \cos \varphi = -\mu(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi)$$

und

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2^*$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mr^2 2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}J_{\text{R}}^{(\text{A})} 2\dot{\varphi} \right) - \left(-mgr \sin \varphi - m_{\text{R}}g\frac{l}{2} \sin \varphi \right) = 0$$

$$m[2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}] + J_{\text{R}}^{(\text{A})}\ddot{\varphi} + mgr \sin \varphi + \frac{1}{2}m_{\text{R}}gl \sin \varphi = 0 \mid : mr \neq 0$$

$$\left(r + \frac{J_{\text{R}}^{(\text{A})}}{mr} \right) \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \left(1 + \frac{m_{\text{R}}l}{2mr} \right) \sin \varphi = 0$$

Mathematische Dynamik

Modelle und analytische Methoden der Kinematik und
Kinetik

Prechtel, M.

2021, XXI, 525 S. 230 Abb., 37 Abb. in Farbe. Mit

Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-662-62106-6